Početní část 2 - 15.2.2021

3. Integrál nejdřív upravíme

$$
\begin{aligned}
I &= \int \frac{\tan x}{6 + 11\cos x + 6\cos^2 x + \cos^3 x}\,dx \\
&= \int \frac{\sin x}{\cos x(6 + 11\cos x + 6\cos^2 x + \cos^3 x)}\,dx
\end{aligned}
$$

Po substituci $t = \cos x$, $dt = -\sin x\,dx$ dostáváme

$$
\begin{aligned}
I &= -\int \frac{1}{t(6 + 11t + 6t^2 + t^3)}\,dt \\
&= -\int \frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)}\,dt
\end{aligned}
$$

Zde použijeme rozklad na parcilální zlomky. Protože máme jen jednonásobné reálné kořeny, můžeme použít zakrývací pravidlo. Dostaneme

$$
\frac{1}{t(t+1)(t+2)(t+3)} = \frac{1}{6t} - \frac{1}{2(t+1)} + \frac{1}{2(t+2)} - \frac{1}{6(t+3)}
$$

Tak dostaneme

$$
\begin{aligned}
L &= -\frac{1}{6}\int \frac{1}{t}\,dt + \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+1}\,dt - \frac{1}{2}\int \frac{1}{t+2}\,dt + \frac{1}{6}\int \frac{1}{t+3}\,dt \\
&= -\frac{1}{6}\log|t| + \frac{1}{2}\log|t+1| - \frac{1}{2}\log|t+2| + \frac{1}{6}\log|t+3| \\
&\overset{c}{=} -\frac{1}{6}\log|\cos x| + \frac{1}{2}\log|\cos x + 1| - \frac{1}{2}\log|\cos x + 2| + \frac{1}{6}\log|\cos x + 3|
\end{aligned}
$$

Maximální intervaly jsou $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}) + 2k\pi$, $(\frac{\pi}{2}, \pi) + 2k\pi$ a $(\pi, \frac{3\pi}{2}) + 2k\pi$, $k \in \mathbb{Z}$.

4. (a) Nejdříve si spočítáme Taylorovy polynomy 9. stupně funkcí

$$\exp\left(x^2\right) - 1 \quad \text{a} \quad \exp\left(x^3\right) - 1.$$

Pomocí standardního rozvoje pro exp dostaneme téměř okamžitě

$$\begin{aligned}
\exp(x^2) - 1 &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + o(x^9),\\
\exp(x^3) - 1 &= x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6} + o(x^9)
\end{aligned}$$

Přopomeneme si rozvoje funkcí sin, sinh, cos a cosh

$$\begin{aligned}
\sin x &= x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} - \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9),\\
\sinh x &= x + \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^9}{9!} + o(x^9),\\
\cos x &= 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} - \frac{x^6}{6!} - \frac{x^8}{8!} + o(x^9),\\
\cosh x &= 1 + \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{24} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + o(x^9)
\end{aligned}$$

Po dosazení polynomů pro $\exp(x^2) - 1$, resp. $\exp(x^3) - 1$ hned vidíme, že většinu členů můžeme ignorovat (schovají se do $o(x^9)$) a dostaneme

$$\begin{aligned}
\sin(\exp\left(x^2\right) - 1) &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}\right)^3 + o(x^9)\\
&= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} - \frac{x^6}{6} - \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{x^8}{2} + o(x^9)\\
&= x^2 + \frac{x^4}{2} - \frac{5x^8}{24} + o(x^9),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\sinh(\exp\left(x^2\right) - 1) &= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{1}{6}\left(x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24}\right)^3 + o(x^9)\\
&= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{6} + \frac{x^8}{24} + \frac{x^6}{6} + \frac{1}{6} \cdot 3 \cdot \frac{x^8}{2} + o(x^9)\\
&= x^2 + \frac{x^4}{2} + \frac{x^6}{3} + \frac{7x^8}{24} + o(x^9),\\
\cos(\exp\left(x^3\right) - 1) &= 1 - \frac{1}{2}\left(x^3 + \frac{x^6}{2} + \frac{x^9}{6}\right)^2 + o(x^9)\\
&= 1 - \frac{x^6}{2} - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot x^3 \cdot \frac{x^6}{2} + o(x^9)\\
&= 1 - \frac{x^6}{2} - \frac{x^9}{2} + o(x^9),
\end{aligned}$$

a

$$\begin{aligned}\cosh(\exp\left(x^3\right)-1) &= 1+\frac{1}{2}\left(x^3+\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{6}\right)^2+o(x^9)\\ &= 1+\frac{x^6}{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x^3\cdot\frac{x^6}{2}+o(x^9)\\ &= 1+\frac{x^6}{2}+\frac{x^9}{2}+o(x^9).\end{aligned}$$

(b) Označme počítanou limitu L. Pro její výpočet nám budou stačit polynomy 6. stupně, můžeme psát

$$\begin{aligned}L &= \lim_{x\to 0}\frac{\sin\left(\exp\left(x^2\right)-1\right)-\sinh\left(\exp\left(x^2\right)-1\right)}{\cos\left(\exp\left(x^3\right)-1\right)-\cosh\left(\exp\left(x^3\right)-1\right)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{x^2+\frac{x^4}{2}-\left(x^2+\frac{x^4}{2}+\frac{x^6}{3}\right)+o(x^6)}{1-\frac{x^6}{2}-\left(1+\frac{x^6}{2}\right)+o(x^6)}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{-\frac{x^6}{3}+o(x^6)}{-x^6+o(x^6)}=\frac{1}{3}.\end{aligned}$$